Chapitre 21 : Variables aléatoires finies

Dans tout ce chapitre $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ désigne un espace probabilisé quelconque.

I Variable aléatoire réelle

I. 1 Introduction

Considérons l'expérience suivante : on jette deux fois un dé et on s'intéresse à la somme des chiffres obtenus que l'on note S. Modélisons cette expérience de la manière suivante : chaque issue de l'expérience peut être représentée par un couple (x, y) où $x \in \underline{[\![1 ; 6]\!]}$ et $y \in \underline{[\![1 ; 6]\!]}$. Autrement dit l'univers peut s'écrire $\Omega = \underline{[\![1 ; 6]\!]^2}$ et nous sommes en situation d'équiprobabilité.

La somme S est en fait une *variable* qui varie *aléatoirement* selon le couple obtenu. On dit que c'est une **variable aléatoire**. Remarquons que S associe à chaque issue de l'expérience $\omega = (x, y)$ un chiffre (la somme des chiffres obtenus) : c'est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

Pour finir, remarquons que ce qui nous intéresse, c'est la somme des chiffres obtenus et non pas les chiffres obtenus. On s'intéressera par exemple par la suite à la probabilité que cette somme soit égale, inférieure, supérieure à un certain réel. Donner par exemple la probabilité que la somme soit inférieure ou égale à 3 que l'on notera de manière simple : $\mathrm{P}(S \leqslant 3)$.

On est en situation d'équiprobabilité et l'univers possède $6 \times 6 = 36$ éléments.
Il suffit de trouver le cardinal de l'évènement « la somme est inférieure ou égale à 3 » : seules les issues $(1, 1)$, $(1, 2)$ et $(2, 1)$ réalisent cet évènement.
Ainsi, $\mathrm{P}(S \leqslant 3) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$.

I. 2 Définitions et exemples

Définition

Une **variable aléatoire réelle** X sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une <u>application de Ω dans $\mathbb{R}$</u> telle que pour tout réel x,

$$[X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{A}$$

(c'est-à-dire que cet ensemble est un événement).

Autrement dit, une variable aléatoire réelle associe à chaque issue d'une expérience un nombre réel. Le fait que $[X \leqslant x]$ soit un évènement pour tout $x \in \mathbb{R}$ permettra de calculer la probabilité de cet ensemble.

Notations :

- On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire X, on a donc :

$$X(\Omega) = \underline{\{X(\omega),\ \omega \in \Omega\}}.$$

  On dit que $X(\Omega)$ est le <u>**support**</u> de X.
- Si $x \in \mathbb{R}$, on note $[X = x]$ l'ensemble $\underline{\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}}$.
- Si $x \in \mathbb{R}$, on note $[X \geqslant x]$ l'ensemble $\underline{\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant x\}}$.
- On définit de même $[X > x]$ et $[X < x]$.
- Si I est un intervalle, on note $[X \in I]$ l'ensemble $\underline{\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}}$.

Exemple. Reprenons l'exemple de l'introduction. Le support de S est $S(\Omega) = \underline{[\![2\,;\,12]\!]}$. L'évènement $[S=11]$ est réalisé si et seulement si la somme des deux numéros obtenus vaut 11. On a donc :

$$[S=11] = \underline{\left\{(x,y)\in[\![1\,;\,6]\!]^2 \mid x+y=11\right\} = \{(5,6),(6,5)\}}.$$

Exercice 1. Un joueur lance une pièce jusqu'à obtenir un « Pile ». On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués jusqu'au premier « Pile », et à 0 si l'on n'obtient jamais « pile ». Déterminer le support $Y(\Omega)$ et exprimer les événements $[Y=2]$ et $[1 \leqslant Y \leqslant 3]$ en fonction des évènements A_n :« On obtient pile au n-ième lancer », pour tout $n \geqslant 1$.

Définition

Une variable aléatoire réelle est dite **finie** lorsque <u>son support est un ensemble fini</u> .

Exemple. Dans les exemples précédents, S est une variable aléatoire finie mais Y non.

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle.
On appelle **fonction de répartition** de X la fonction F_X définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = \underline{\mathrm{P}(X \leqslant x)}.$$

Remarques.

- ▷ $\mathrm{P}(X \leqslant x)$ est une notation abusive pour $\mathrm{P}([X \leqslant x])$.
- ▷ Il faut bien comprendre que $[X \leqslant x]$ correspond à l'évènement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\}$. C'est une notation qui simplifie l'écriture. La fonction de répartition en un point x est donc égale à la probabilité que cette variable aléatoire soit inférieure ou égale à x.

Exercice 2. On jette un dé et on appelle X le chiffre obtenu. Donner la fonction de répartition de X et la représenter graphiquement.

II Variable aléatoires finies

Dans toute la suite, on suppose que X est une variable aléatoire finie. Il existe donc n nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) tels que $X(\Omega) = \underline{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}}$.

II. 1 S.C.E associé à une variable aléatoire finie

Définition/Proposition

Soit X une variable aléatoire finie.
Alors $\underline{([X=x_1],[X=x_2],\ldots,[X=x_n])}$ est un système complet d'événements appelé **système complet d'événements associé** à la variable aléatoire finie X.

Exemple. Le système complet d'évènements associé à la variable aléatoire S (somme des deux dés) est :

$([S=2]\,,[S=3]\,,[S=4]\,,\cdots,[S=12]) = ([S=k])_{2\leqslant k\leqslant 12}$.

Notation : On note aussi $\Big([X=x]\Big)_{x\in X(\Omega)}$ le système complet d'événements associé à X.

II. 2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire finie

Définition

Déterminer la **loi de probabilité** d'une variable aléatoire finie X c'est :

- Déterminer le support de X, c'est-à-dire toutes les valeurs possibles de X.
- Calculer la probabilité $\mathrm{P}\left(X=x\right)$ pour toutes les valeurs de x appartenant à $X(\Omega)$.

On représente habituellement la loi de X par le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$\mathrm{P}\left(X=x_i\right)$	$\mathrm{P}\left(X=x_1\right)$	$\mathrm{P}\left(X=x_2\right)$	$\ldots$	$\mathrm{P}\left(X=x_n\right)$

Exercice 3. Déterminer la loi de probabilité de S.

Exercice 4. On lance trois fois une pièce équilibrée et on note Y le nombre de « Piles » obtenus. Déterminer la loi de Y.

Remarque. $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} \mathrm{P}\left(X=x\right) = 1$.

II. 3 Fonction de répartition d'une variable aléatoire finie

Proposition

Soient X une variable aléatoire finie et F_X sa fonction de répartition.
Notons $X(\Omega)=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ avec $x_1<x_2<\ldots<x_n$ ($n\in\mathbb{N}^*$).

- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F_X(x)\in [0,1]$
- F_X est une fonction croissante .
- Si $x<x_1$ alors $F_X(x)=0$ et si $x\geqslant x_n$ alors $F_X(x)=1$.
- Soit $i\in[\![1\,;\,n-1]\!]$. Pour tout $x\in[x_i,x_{i+1}[$, on a

$$F_X(x)=\sum_{k=1}^{i} P(X=x_k)\ .$$

- F_X est continue à droite en chacun de ses points de discontinuité $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

Exercice 5. Expliciter la fonction de répartition de la variable Y de l'exercice précédent.

Remarque. La fonction de répartition d'une variable aléatoire finie est définie à partir de sa loi de probabilité. Réciproquement, si on connait sa fonction de répartition, on peut retrouver la loi de probabilité d'une variable aléatoire finie.

Proposition

Soient X une variable aléatoire finie et F_X sa fonction de répartition.

- Les points du support sont les points de discontinuité de F_X.
- Si l'on note $X(\Omega)=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ avec $x_1<x_2<\ldots<x_n$, alors :
  1. $\mathrm{P}\left(X=x_1\right) = F_X(x_1)$,
  2. pour tout $i\in\{2,\ldots,n\}, \mathrm{P}\left(X=x_i\right) = F_X(x_i)-F_X(x_{i-1})$.

Corollaire

Si deux variables aléatoires finies ont la même fonction de répartition, alors elles ont la même loi de probabilité .

Attention : Il ne faut pas confondre la variable aléatoire (la fonction qui varie avec le hasard) et sa loi (la probabilité qui décrit son comportement). Par exemple, si on lance deux dés équilibrés et que l'on note X le résultat du premier dé et Y le résultat de deuxième. Alors X et Y ont la même loi (laquelle ?) mais X et Y sont deux variables aléatoires différentes (pourquoi ?).

II. 4 Variable aléatoire $Y = g(X)$

On peut « créer » à partir d'une variable aléatoire X d'autres variables aléatoires dépendantes de X.

Proposition

Soit g une fonction réelle dont l'ensemble de définition contient $X(\Omega)$.

L'application $g \circ X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & g(X(\omega)) \end{array}$ est une variable aléatoire finie .

On la note habituellement $g(X)$.

Exercice 6. Reprenons le dernier exercice lié à la variable Y. Un joueur paie 4 euros pour jouer, puis lance une pièce 3 fois de suite. Il gagne 2 euros à chaque fois qu'il obtient Pile. On appelle G le gain algébrique du joueur en euros. Exprimer G en fonction de la variable Y et déterminer $G(\Omega)$.

Proposition

Soit X une variable aléatoire finie.
Notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).
Soit g une fonction réelle dont l'ensemble de définition contient $X(\Omega)$.
La loi de la variable aléatoire $Y = g(X)$ est donnée par (attention il peut y avoir répétitions) :

$$Y(\Omega) = \{g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_n)\} .$$

et pour tout $y \in Y(\Omega)$,

$$P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega) |\, g(x)=y} \mathrm{P}\left(X = x\right) .$$

Exercice 7. Déterminer la loi de la variable aléatoire G de l'exemple précédent puis celle de G^2.

III Moments d'une variable aléatoire finie

Dans toute la suite, on suppose que X est une variable aléatoire finie. Il existe donc n nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) tels que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

III. 1 Espérance

Définition

Soit X une variable aléatoire finie. On appelle **espérance** de X et on note $\mathrm{E}(X)$ le nombre

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathrm{P}\left(X = x\right) .$$

Remarques.

- ▷ L'espérance est la moyenne des valeurs possibles de X pondérées par leur probabilité.
- ▷ Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors l'espérance de X est donnée par la formule suivante :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times \mathrm{P}\left(X = x_i\right) .$$

Exercice 8. En reprenant l'exercice précédent, donner l'espérance de Y et de G. Interpréter $\mathrm{E}(G)$.

Notation : On dit que X est positive si elle ne prend que des valeurs positives et si Y est une autre variable aléatoire, on note $X \leqslant Y$ si pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$.

Proposition

Soient X et Y deux variables aléatoires finies et a un réel. Alors

- $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$ et $\mathrm{E}(aX) = a\,\mathrm{E}(X)$ (*linéarité*).
- Si X est positive alors $\mathrm{E}(X) \geqslant 0$ (*positivité*).
- Si $X \leqslant Y$, alors $\mathrm{E}(X) \leqslant \mathrm{E}(Y)$ (*croissance*).

Remarques.

- ▷ Si X est une variable certaine, c'est-à-dire s'il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = a) = 1$ alors $E(X) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega) = \{a\}} x\,\mathrm{P}(X = x) = a\,\mathrm{P}(X = a) = a \times 1 = a$.
- ▷ Si X est une variable aléatoire finie et $a, b \in \mathbb{R}$, alors $\mathrm{E}(aX+b) = \mathrm{E}(aX) + \mathrm{E}(b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$.

Définition

Une variable aléatoire finie est dite **centrée** lorsque $\mathrm{E}(X) = 0$.

Proposition

Si X est une variable aléatoire finie alors la variable aléatoire $X - \mathrm{E}(X)$ est centrée.

Théorème : de transfert

Soient X une variable aléatoire finie et g une fonction réelle définie sur $X(\Omega)$. Alors :

$$\mathrm{E}(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\,\mathrm{P}\left(X = x\right) .$$

Remarque. Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ alors :

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(g(X)) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\mathrm{P}(X = x_i) .$$

Exercice 9. Reprenons la variable aléatoire Y de l'exercice précédent. On pose $X = Y^2$ et $Z = 2Y + 1$. Donner l'espérance de ces deux variables aléatoires. Comment « rendre » la variable Y centrée ?

III. 2 Moment d'ordre r

Définition

Soient X une variable aléatoire finie et r un entier naturel non nul.
On appelle **moment d'ordre** r et on note $m_r(X)$ le réel

$$m_r(X) = \underline{\mathrm{E}(X^r)}\,.$$

Proposition : Conséquence du Théorème de transfert

Soient X une variable aléatoire finie et r un entier naturel non nul. Alors

$$m_r(X) = \underline{\sum_{x \in X(\Omega)} x^r \, \mathrm{P}\left(X = x\right)}\,.$$

Remarques.

- ▷ Le moment d'ordre 1 n'est rien d'autre que $\underline{\text{l'espérance}}$.
- ▷ Si on note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, on a alors :

$$m_r(X) = \underline{\sum_{i=1}^{n} x_i^r \, \mathrm{P}\left(X = x_i\right)}$$

Exercice 10. Donner le moment d'ordre 2 et d'ordre 3 de Y (la variable aléatoire de l'exercice précédent).

III. 3 Variance

Définition

Soit X une variable aléatoire finie.
On appelle **variance** de la variable aléatoire X et on note $\mathrm{V}(X)$ le réel défini par :

$$\mathrm{V}(X) = \underline{m_2\big(X - \mathrm{E}(X)\big)} = \underline{\mathrm{E}\left(\big(X - \mathrm{E}(X)\big)^2\right)}\,.$$

Remarques.

- ▷ D'après le théorème de transfert, comme $\mathrm{E}(X)$ est un réel fixé, on a donc :

$$\mathrm{V}(X) = \underline{\sum_{x \in X(\Omega)} \big(x - \mathrm{E}(X)\big)^2 \, \mathrm{P}\left(X = x\right)}\,.$$

- ▷ Comme $\big(X - \mathrm{E}(X)\big)^2$ est une variable aléatoire $\underline{\text{positive}}$ et par positivité de l'espérance, on a $\mathrm{V}(X) \underline{\geqslant 0}$.
- ▷ La variance d'une variable aléatoire est la moyenne du carré de la distance à la valeur moyenne de X. C'est un indicateur de **dispersion** de la variable aléatoire. Si la variance est proche de 0, alors les valeurs de X sont proches de l'espérance et si la variance est élevée, alors la variable aléatoire prend des valeurs très dispersées.

Exercice 11. Déterminer les variances des variables aléatoires finies X, Y et Z dont les lois sont données par les tableaux suivants :

k	2
$\mathrm{P}\left(X = k\right)$	1

k	0	1	2	3	4
$\mathrm{P}(Y = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

k	-4	6
$\mathrm{P}(Z = k)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

Remarque. Si X est une variable aléatoire finie telle que $X(\Omega) = \{a\}$ alors $\mathrm{E}(X) = \underline{\ a\ }$ et $\mathrm{V}(X) = \underline{\ 0\ }$.

Proposition : Formule de Koenig-Huygens

Soit X une variable aléatoire finie. Alors $\mathrm{V}(X) = \underline{\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2}$.

Méthode

Pour calculer la variance d'une variable aléatoire on utilise le plus souvent la formule de Koenig-Huygens et le Théorème de transfert (pour calculer $\mathrm{E}(X^2)$).

Exercice 12. Calculer les variances des variables aléatoires de l'exemple précédent à l'aide de la formule de Koenig-Huygens.

Proposition

Soient X une variable aléatoire finie et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $\mathrm{V}(aX + b) = \underline{a^2\,\mathrm{V}(X)}$.

Définition

Soit X une variable aléatoire finie. On appelle **écart-type** de la variable aléatoire X et on note $\sigma(X)$ le réel $\sigma(X) = \underline{\sqrt{\mathrm{V}(X)}}$.

Définition

Soit X une variable aléatoire finie.
On dit que X est **réduite** lorsque $\sigma(X) = \underline{\ 1\ }$ (ou $\mathrm{V}(X) = \underline{\ 1\ }$).

Proposition

Soit X une variable aléatoire finie.
Si $\sigma(X) \neq 0$ alors la variable aléatoire $\underline{\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}}$ est centrée et réduite.
Elle est appelée **la variable aléatoire centrée et réduite associée à** X et on la note X^*.

IV Lois usuelles

IV. 1 Loi certaine

Définition

Soit a un réel. On dit qu'une variable aléatoire finie X suit la **loi certaine de paramètre** a si

$$\mathrm{P}\left(X = a\right) = \underline{\ 1\ }.$$

Autrement dit, une variable finie suit une loi certaine si elle est presque-sûrement constante.

Remarque. Il est possible que $X(\Omega)$ contienne plusieurs points. Mais dans ce cas $\mathrm{P}(X = x) = \underline{\ 0\ }$ pour tout $x \in X(\Omega)$ différent de a.

Proposition

Soit X une variable aléatoire finie. Alors X suit une loi certaine si et seulement si $\underline{\mathrm{V}(X) = 0}$.
Dans ce cas X suit la loi certaine de paramètre $a = \underline{\mathrm{E}(X)}$.

IV. 2 Loi uniforme

Définition

Soient X une variable aléatoire finie et $n \in \mathbb{N}^*$.
On dit que X **suit la loi uniforme sur** $[\![1\,;\,n]\!]$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1\,;\,n]\!])$ si :

- $X(\Omega) = [\![1\,;\,n]\!]$.
- Pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$, $\mathrm{P}\left(X = k\right) = \dfrac{1}{n}$.

Autrement dit, X suit une loi uniforme sur $[\![1\,;\,n]\!]$ si elle prend ses valeurs dans $[\![1\,;\,n]\!]$ et que l'on a la même probabilité d'obtenir chacun de ces nombres.

Proposition

Soient X une variable aléatoire finie et $n \in \mathbb{N}^*$. Si X suit la loi uniforme sur $[\![1\,;\,n]\!]$ alors :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Exercice 13. Soit X la variable aléatoire égale au résultat du lancer d'un dé équilibré. Déterminer la loi de X et en déduire son espérance et sa variance.

Définition

Soient X une variable aléatoire finie et n et m deux entiers naturels avec $n \leqslant m$.
On dit que X **suit la loi uniforme sur** $[\![n\,;\,m]\!]$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![n\,;\,m]\!])$ si $X(\Omega) = [\![n\,;\,m]\!]$ et que pour tout $k \in [\![n\,;\,m]\!]$, $\mathrm{P}\left(X = k\right) = \dfrac{1}{m-n+1}$.

Remarque. On peut toujours se ramener à la loi uniforme sur $[\![1\,;\,n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

IV. 3 Loi de Bernoulli

Définition

Soit $p \in [0, 1]$.

1. On appelle **épreuve de Bernoulli** de paramètre p une expérience aléatoire comportant deux issues : le succès qui a pour probabilité p et l'échec qui a pour probabilité $1-p$.
2. Soit X une variable aléatoire finie. On dit que X **suit la loi de Bernoulli de paramètre** p et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ si
   - $X(\Omega) = \{0, 1\}$
   - $\mathrm{P}\left(X = 1\right) = p$ et $\mathrm{P}\left(X = 0\right) = 1-p$.

Si l'on considère une épreuve de Bernoulli de paramètre p et que l'on note X la variable aléatoire finie valant 1 si l'on obtient un succès et 0 si l'on obtient un échec alors X suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Dans ce cas l'évènement $[X = 1]$ est l'évènement « on obtient un succès » et $[X = 0]$ est « obtenir un échec ».

Remarque. $\mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \mathcal{U}\left([\![0\,;\,1]\!]\right)$.

Proposition

Soient X une variable aléatoire finie et $p \in]0,1[$. Si X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ alors

$$\mathrm{E}(X) = \underline{p} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(X) = \underline{p(1-p)}.$$

Exercice 14. On lance une pièce truquée qui donne « Face » avec la probabilité $\frac{1}{3}$. Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat est « Face » et 0 si le résultat est « Pile ». Déterminer la loi de la variable aléatoire X, ainsi que son espérance et sa variance.

IV. 4 Loi binomiale

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.
On dit qu'une variable aléatoire X **suit une loi binomiale de paramètres** n **et** p et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ si X est une variable aléatoire comptant <u>le nombre de succès</u> lors d'une répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.

Proposition

Soient X une variable aléatoire finie, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors :

- $X(\Omega) = \underline{\{0, 1, \dots, n\}}$.
- Pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $\mathrm{P}\left(X = k\right) = \underline{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$.

Remarques.

- ▷ Si $n = 1$, on retrouve la loi de Bernoulli de paramètre p.
- ▷ Cette proposition est en fait équivalente à la définition.

Exercice 15. Une secrétaire effectue 50 appels vers 50 correspondants distincts. On admet que ces appels constituent 50 expériences indépendantes et que pour chaque appel la probabilité d'obtenir le correspondant est $\frac{1}{3}$. On note X le nombre de clients obtenus. Donner la loi de X.

Proposition

Soient X une variable aléatoire finie, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.
Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p alors

$$\mathrm{E}(X) = \underline{np} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(X) = \underline{np(1-p)}.$$

Exemple. En moyenne, la secrétaire de l'exercice précédent va réussir à joindre $\underline{\dfrac{50}{3}}$ correspondants.

Exercice 16. On lance 5 fois une pièce truquée qui donne « Face » avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
On suppose que les résultats des différents lancers sont indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de « Face » obtenus. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X, ainsi que son espérance et sa variance. Quelle est la probabilité que l'on obtienne au maximum 1 « Face » ?

Exercice 17. Une urne contient des boules blanches et des boules noires.
On note $p \in]0,1[$ la proportion de boules blanches.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs avec remise dans cette urne.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues. Donner la loi de probabilité de X, son espérance et sa variance. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des boules de la même couleur ?

Exercice 18. Considérons deux réels positifs non nuls a et b et un entier naturel non nul n. On pose $p = \dfrac{a}{a+b} \in]0,1[$. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. En utilisant le système complet d'évènements associés à X, démontrer la formule du binôme dans ce cas :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Rappel : Formule du triangle de Pascal

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leqslant p \leqslant n-1$. On a :

$$\binom{n}{p} = \underline{\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}}.$$

Théorème : Formule du binôme de Newton

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(a+b)^n = \underline{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}.$$