TD 6 : Les matrices

Exercice 1. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB, BA, AC, CA, ABC, $A(B+2C)$.
2. Résoudre l'équation $AX = XA$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Calculer lorsque c'est possible le produit AB et le produit BA pour les matrices A et B suivantes.

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = {}^tA$.

Exercice 3. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer AB.
2. Que peut-on en déduire ?

Exercice 4. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AC.
2. Calculer BC.
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ -3 & 11 & 2 \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices X vérifiant $AX = B$.

Exercice 6. Déterminer et prouver, à l'aide de conjectures, toutes les puissances des matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3, puis A^n pour tout entier naturel n.
2. La matrice A est elle inversible ?

Exercice 8. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 9. Soient A, P, Q et D les matrices définies par

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer QP. Que peut-on en déduire ? Vérifier que $A = PDQ$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nQ$. En déduire A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. Mêmes questions avec les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -6 & -3 \\ -4 & 12 & 2 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & -3/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \\ 3/2 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1 & -1 & 1/2 \\ -1/3 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $(A - I_4)^2 = 0_4$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
2. Montrer que A^2 est inversible et calculer $(A^2)^{-1}$.

Exercice 11. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I$.
2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1}.

Exercice 12. Soient A et P les matrices définies par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.
2. On pose $T = PAP^{-1}$. Calculer T, T^2, T^3 puis déterminer T^n pour tout $n \geqslant 3$.
3. En déduire que pour tout $n \geqslant 3$, $A^n = 0_3$.
4. Pour tout réel t, on définit la matrice $E(t)$ par :

$$E(t) = I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2.$$

   (a) Que vaut $E(0)$?
   (b) Montrer que pour tout couple $(t, t') \in \mathbb{R}^2$, $E(t)E(t') = E(t + t')$.
   (c) Soit $t \in \mathbb{R}$. A l'aide de la question précédente, calculer $E(t)E(-t)$. En déduire que la matrice $E(t)$ est inversible et exprimer son inverse à l'aide de t, I_3, A et A^2.
   (d) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une expression simple de $E(t)^n$.

Exercice 13. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
5. $E = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
6. $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 15. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs du réel λ la matrice $A - \lambda I$ n'est-elle pas inversible ?
2. Déterminer en fonction de λ toutes les matrices colonnes X telles que $AX = \lambda X$.
3. Mêmes questions avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 16. Résoudre le système d'équations suivant selon les valeurs des deux paramètres réels a et b :

$$\begin{cases} x + 3y + 3z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + ay + z = b \end{cases}$$

Exercice 17. Déterminer un trinôme P tel que $P(1) = -1$, $P(2) = 9$ et $P(-1) = -3$.

Exercice 18. *Problème sur les matrices de Leontief*
L'économie d'un pays fictif dépend de trois secteurs : l'agriculture, les biens manufacturés et l'énergie. L'unité de production est le milliard d'euros. Pour pouvoir fonctionner, chaque secteur nécessite l'utilisation d'une partie de la production des autres secteurs et d'une partie de sa propre production. Ces secteurs doivent, en outre, satisfaire les besoins de la population, on parle alors de modèle ouvert car il y a des demandes extérieures aux trois secteurs.

Dans notre exemple, les besoins de la population sont les suivants :

- 10 unités d'agriculture,
- 20 unités de biens manufacturés,
- 2 unités d'énergie.

Le tableau ci-dessous détaille les échanges inter-industriels durant une année (avec des données en fréquence) :

	Consommée par rapport à la production agricole	Consommée par rapport à la production de biens manufacturés	Consommée par rapport à la production énergétique
Agriculture	$0,6$	$0,1$	$0,1$
Biens manufacturés	$0,1$	$0,6$	$0,1$
Énergie	$0,2$	$0,2$	$0,7$

Afin d'avoir une économie équilibrée, la production totale de ces secteurs, doit couvrir les besoins des secteurs et de la population. On se propose de déterminer les productions de l'agriculture, des biens manufacturés, de l'énergie pour que l'économie soit équilibrée.

1. Interpréter les données des cases de la ligne « Énergie ».
2. *Modélisation du problème*
   On note x (respectivement y et z) le nombre d'unités produites par l'agriculture (respectivement les biens manufacturés et l'énergie) durant une année.
   (a) Expliquer pourquoi on a la relation suivante :
   $$0,1x + 0,6y + 0,1z + 20 = y.$$
   Ecrire une relation analogue pour le secteur de l'agriculture puis pour celui de l'énergie.
   (b) Montrer que le système obtenu s'écrit aussi $A \times P + D = P$ où $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix}$ et où A est une matrice carrées à déterminer (on dit que A est la matrice des coefficients techniques).
   (c) Montrer que résoudre l'équation $A \times P + D = P$ revient à résoudre l'équation $(I_3 - A)P = D$.
3. *Résolution du problème*
   (a) On pose $L = I_3 - A$. On dit alors que L est la matrice de Leontief correspondant au problème. Déterminer L, puis en déduire la solution de l'équation $L \times P = D$.
   (b) Quelle doit être la production de chaque secteur pour que l'économie soit équilibrée ?